

Un algoritmo per la verifica allo stato limite delle tensioni in esercizio di sezioni poligonali in cemento armato soggette a flessione composta

Ing. Maurizio Orlando, Ing. Luigi Paone
Dipartimento di Ingegneria Civile, Università degli Studi di Firenze
Via di S.Marta, 3 – 50139 Firenze

Sommario

Si presenta un algoritmo per la verifica allo stato limite delle tensioni in esercizio di sezioni in c.a. a contorno poligonale soggette a flessione composta. L'algoritmo calcola in forma chiusa le risultanti degli sforzi sulla sezione, previa scomposizione dell'area di calcestruzzo reagente in un insieme di triangoli, e si differenzia così da altri algoritmi che utilizzano procedure di integrazione numerica. Se la sezione è interamente reagente, la scomposizione iniziale in triangoli viene utilizzata direttamente per calcolare la risultante degli sforzi di compressione mediante l'integrazione in forma chiusa su ogni triangolo. Se al contrario la sezione è parzializzata, ovvero l'asse neutro taglia la sezione, la scomposizione iniziale in triangoli è modificata in modo da interessare solo la zona di calcestruzzo compresso.

L'algoritmo è valido per sezioni di forma poligonale, dove la zona compressa può sempre essere scomposta in un insieme di triangoli, qualunque sia la posizione dell'asse neutro. Per sezioni a contorno misto, in parte poligonale ed in parte curvilineo, è invece necessario approssimare la porzione di contorno curvilineo con un contorno poligonale, e la bontà della soluzione sarà pertanto legata all'accuratezza di questa approssimazione. L'algoritmo non contempla il caso di sezioni circolari con cavità circolari, nelle quali la forma assialsimmetrica della sezione consente di integrare direttamente le equazioni di equilibrio in forma chiusa.

Sono descritti in modo dettagliato alcuni esempi di verifica allo stato limite delle tensioni in esercizio di sezioni in c.a. di forma ricorrente. I risultati numerici sono riportati per diverse condizioni di carico, sia per il caso di sezione interamente reagente sia per quello di sezione parzializzata.

L'algoritmo proposto è comunque utilizzabile anche per il tracciamento delle superfici di interazione allo S.L.U. Difatti la scomposizione in triangoli permette di integrare gli sforzi sul calcestruzzo in modo "esatto" anche se il legame sforzi-deformazioni segue un andamento parabola-rettangolo.

Nomenclatura

- f_{ck} = resistenza caratteristica a compressione del cls misurata su provini cilindrici
- γ_c = coefficiente di sicurezza del calcestruzzo
- γ_s = coefficiente di sicurezza dell'acciaio
- $f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c$ = resistenza di calcolo del calcestruzzo dove $\gamma_c = 1,0$ per S.L.E. e $\gamma_c = 1,6$ per S.L.U.
- f_{ctm} = valore medio della resistenza a trazione semplice del calcestruzzo
- f_{yk} = tensione caratteristica di snervamento dell'acciaio
- F_d = valore di calcolo delle azioni negli S.L.E.
- G_k = valore caratteristico dei carichi permanenti
- Q_{ik} = valore caratteristico dell'i-mo sovraccarico variabile
- ψ_{2i} = coefficiente di contemporaneità dell'i-mo sovraccarico variabile
- σ_c, ϵ_c = tensione e deformazione del calcestruzzo
- σ_s, ϵ_c = tensione e deformazione dell'acciaio
- $\sigma_{si}, \epsilon_{si}$ = tensione e deformazione nella i-ma barra di acciaio

- A_{si} = area della i-ma barra di acciaio
- (XOY) = riferimento “globale” della sezione
- $(\overline{XOY})$ = riferimento “locale” dell’elemento
- $\{F\}$ = vettore delle sollecitazioni esterne
- N = sforzo normale applicato nell’origine del riferimento globale
- M_x = momento flettente diretto come X nel riferimento globale
- M_y = momento flettente diretto come Y nel riferimento globale
- $[\overline{M}_e^k]$ = matrice proprietà di massa nel riferimento locale per l’elemento k-esimo
- $[M_e^k]$ = matrice proprietà di massa nel riferimento globale per l’elemento k-esimo
- $[M_e]$ = matrice proprietà di massa nel riferimento globale della sezione di cls
- $[M_s]$ = matrice proprietà di massa nel riferimento globale delle barre di acciaio
- $[M]$ = matrice proprietà di massa nel riferimento globale della sezione ideale
- R^k = trasformazione di coordinate per elemento k-esimo dal locale al globale
- $\{X\}$ = vettore dei parametri a, b, c che individuano il piano delle tensioni
- $[N]$ = matrice delle coordinate dei nodi della sezione poligonale
- $[E]$ = matrice degli elementi triangolari con riferimento ai nodi
- $[A]$ = matrice con coordinate delle barre di acciaio e loro area

1. Introduzione

La verifica allo stato limite di esercizio di una sezione in c.a. soggetta a presso- o tensoflessione è di rapida soluzione se la sezione è interamente reagente. Determinate le proprietà di massa (area, momenti statici, momenti di inerzia) della sezione omogeneizzata a calcestruzzo (o delle sole barre di acciaio nel caso di tensoflessione), è sufficiente scomporre secondo gli assi principali di inerzia la sollecitazione flettente di progetto e sovrapporre gli effetti di uno sforzo normale e di due flessioni rette. Tuttavia se la sezione ha una forma molto irregolare, il calcolo delle sue proprietà di massa può risultare alquanto complesso.

Se la sezione è parzializzata, la zona reagente varia al variare delle caratteristiche di sollecitazione e la posizione dell’asse neutro non è nota a priori. Ad eccezione del caso di sezioni simmetriche (rettangolari, a T, ecc.) inflesse secondo l’asse di simmetria, per le quali si conosce a priori la direzione dell’asse neutro e occorre determinare solo la posizione, per una sezione di forma poligonale qualunque, non si conoscono a priori né l’orientazione né la posizione dell’asse neutro. Al variare delle sollecitazioni esterne varia la sezione reagente e le equazioni di equilibrio della sezione costituiscono un sistema non lineare, per la soluzione del quale occorre utilizzare un procedimento numerico per successive approssimazioni.

I coefficienti della matrice del sistema (che rappresentano le proprietà di massa della sezione reagente) possono essere espressi in forma chiusa per sezioni di forma particolare, come le sezioni rettangolari [1], ma non per sezioni di forma qualunque. Si può allora pensare di approssimare la sezione reagente con la somma di piccole aree elementari di forma rettangolare da considerarsi con buona approssimazione masse puntiformi ([2], [3]) o di suddividere la sezione reagente in domini parziali a forma di quadrilateri generici e, con opportune trasformazioni di coordinate, effettuare l’integrazione con un metodo di quadratura [4]. In entrambi i casi la soluzione dipende in modo sostanziale dal numero di aree elementari considerate ai fini della valutazione della risultante delle compressioni.

Esiste anche un metodo che consente di esprimere i coefficienti del sistema in forma chiusa attraverso una costruzione geometrica [5] ricavando le proprietà geometriche della sezione reagente come somma algebrica delle proprietà di triangoli, dotati ognuno di un segno, ottenuti prolungando i lati della sezione fino ad incontrare l’asse neutro. In Fig. 1 è riportato lo schema per il caso di asse neutro esterno alla sezione.

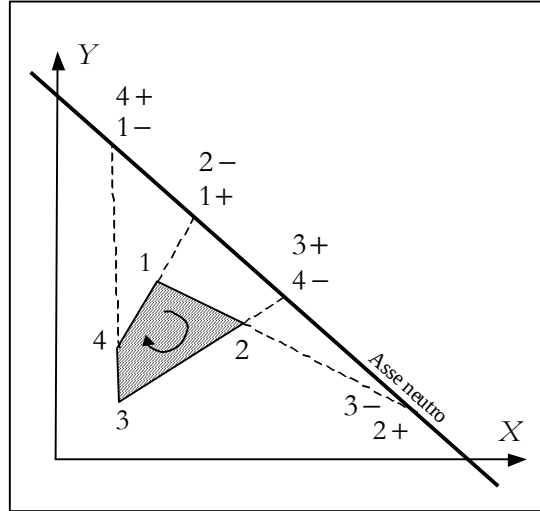


Figura 1 – Triangoli ottenuti prolungando i lati della sezione fino ad incontrare l'asse neutro [4].

Viene definita in tale modo l'area della sezione come:

$$A_c = \sum_{i=1}^n s_i A_i$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i triangoli (due per ogni vertice) costruiti sul prolungamento dei lati della sezione con l'asse neutro, le A_i sono le aree dei triangoli e dove i coefficienti s_i assumono i seguenti valori:

$$\begin{aligned} s_i &= +1 && \text{per } x_{i-} > x_{i+} \\ s_i &= -1 && \text{per } x_{i-} < x_{i+} \end{aligned}$$

Il pedice $i+$ o $i-$ dipende dal fatto che ci si allontani dal vertice in questione o ci si avvicini, sulla base di un verso di percorrenza prefissato. Se invece l'asse neutro taglia la sezione, allora la parte di calcestruzzo teso viene esclusa automaticamente, limitando la sommatoria a tutti i vertici compresi nella zona compressa.

Anche le altre proprietà di massa della sezione sono determinate a partire da quelle dei singoli triangolari. In particolare il tensore di inerzia di ogni triangolo è calcolato come somma di quello di tre aree concentrate nel punto medio dei lati del triangolo, ognuna pari a $1/3$ dell'area del triangolo di partenza (Fig. 2).

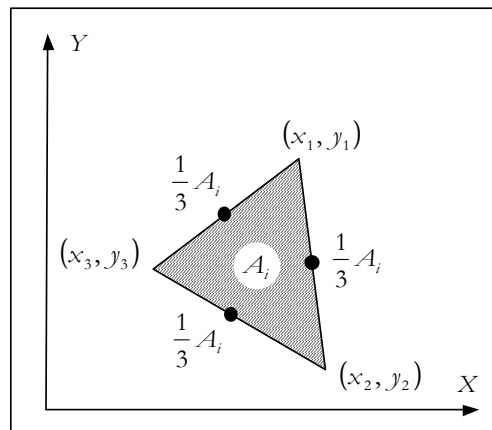


Figura 2 – Aree concentrate aventi tensore di inerzia complessivo uguale a quello del triangolo [4].

In questo studio si propone quindi un nuovo algoritmo per calcolare in forma chiusa i suddetti coefficienti per una qualunque sezione poligonale in c.a. pressoinflessa o tensoinflessa, sia essa interamente reagente o parzializzata. L'algoritmo è stato sviluppato in ambiente MATLAB® [6] da uno degli autori utilizzando i principi della programmazione ad oggetti (O.O.P. = *Objected Oriented Programming*) [7]. L'algoritmo nasce dalla constatazione che la zona di calcestruzzo reagente di una sezione poligonale si può sempre scomporre in un insieme di triangoli. La stessa scomposizione non si può applicare a sezioni aventi una parte del contorno curvilinea, o in cui siano presenti cavità circolari. Per queste sezioni è necessario approssimare la parte curvilinea del contorno con una poligonale, e la bontà della soluzione sarà pertanto legata all'accuratezza di questa approssimazione. Diverso è il caso di sezioni poligonali aventi cavità circolari per le quali, quando l'asse neutro si troverà ad includere o tagliare la cavità, basterà dedurre tale contributo dall'area poligonale compressa [8].

Il lavoro si compone di tre parti. Nella prima parte, dopo un breve richiamo sulla verifica allo stato limite delle tensioni in esercizio, si illustra l'idea di base del metodo. La seconda parte descrive in modo dettagliato la struttura dell'algoritmo per la verifica allo stato limite delle tensioni in esercizio, con le principali espressioni usate per il suo sviluppo nel codice MATLAB. Infine la terza parte illustra la possibilità di estendere il metodo proposto alla verifica allo stato limite ultimo.

2. Richiami sullo stato limite delle tensioni in esercizio

Si richiamano brevemente i concetti alla base della verifica allo stato limite delle tensioni di esercizio delle sezioni in c.a.

Le tensioni di esercizio si calcolano con riferimento alle proprietà geometriche della sezione interamente reagente o della sezione parzializzata, assumendo in via semplificativa un coefficiente di omogeneizzazione per l'acciaio pari a 15.

Dapprima si esegue il calcolo delle tensioni prodotte dalla combinazione di carico rara sulla sezione interamente reagente, ipotizzando un comportamento elastico lineare per il calcestruzzo e per l'acciaio, sia a compressione che a trazione. Se la massima trazione di calcolo nel calcestruzzo non supera il valore medio f_{ctm} della resistenza a trazione semplice (assiale) dello stesso materiale, allora si assumono i valori delle tensioni calcolate sulla sezione interamente reagente. Se al contrario la massima trazione nel calcestruzzo è superiore a f_{ctm} , occorre rifare il calcolo sulla sezione parzializzata.

Le tensioni di compressione nel calcestruzzo devono rispettare i limiti indicati nella Tab. 1. La massima trazione nell'acciaio invece non deve superare il valore $0,70 f_{yk}$ sotto la combinazione di carichi rara.

<i>Tipo di ambiente</i>	<i>Combinazione rara</i>	<i>Combinazione rara</i>
Aggressivo	$0,50 f_{ck}$	$0,40 f_{ck}$
Poco o moderatamente aggressivo	$0,60 f_{ck}$	$0,45 f_{ck}$

Tabella 1 - Valori limite delle tensioni di esercizio nel calcestruzzo [9].

Si ricordano infine le espressioni delle combinazioni di carico utilizzate nella verifica delle tensioni di esercizio:

$$\text{Combinazione di carico rara} \quad F_d = G_k + Q_{1k} + \sum_{i=2}^n 0.7 \cdot Q_{ik}$$

$$\text{Combinazione di carico quasi-permanente} \quad F_d = G_k + Q_{1k} + \sum_{i=2}^n \psi_{2i} \cdot Q_{ik}$$

dove i valori di ψ_{2i} sono elencati nella Tab. 2.

Tipo di carico	ψ_2	Tipo di carico	ψ_2
Carichi variabili per abitazione	0,2	Carichi variabili per autorimesse	0,6
Carichi variabili per uffici, negozi, scuole	0,3	Vento e neve	0

Tabella 2 - Valori del coefficiente ψ_2 [9].

3. Impostazione teorica

3.1. L'idea di base: la scomposizione in triangoli

L'idea di base dell'algoritmo è rappresentata dalla scomposizione in triangoli della sezione poligonale da verificare, scomposizione che come anticipato nella introduzione è sempre possibile per una qualunque sezione a contorno poligonale.

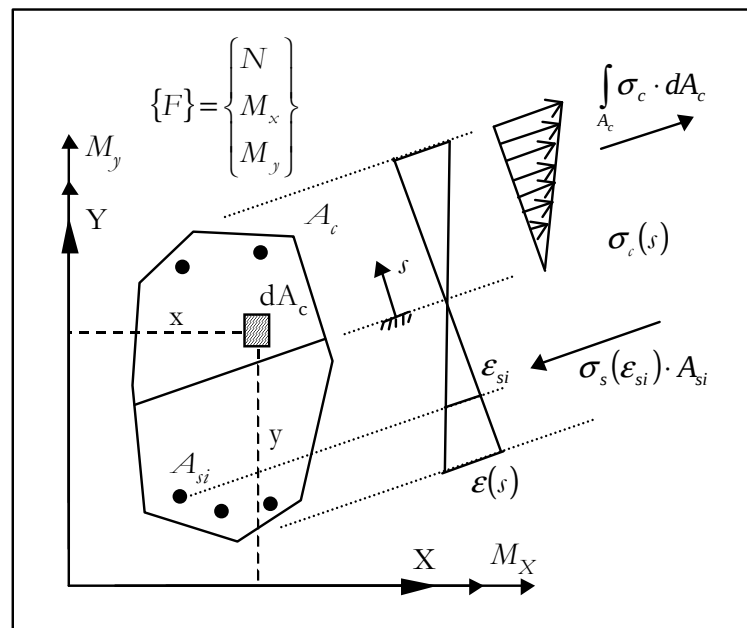


Figura 3 – Andamento delle tensioni in fase elastica in una sezione generica in c.a. pressoinflessa.

Al variare del vettore $\{F\} = \{N, M_x, M_y\}^T$ delle sollecitazioni esterne, assegnato rispetto a un sistema di riferimento “globale” (XOY), la posizione dell'asse neutro varia e con esso l'area di calcestruzzo reagente (Fig. 3). Pertanto, se la sezione è interamente reagente, la scomposizione iniziale in triangoli è utilizzata direttamente per calcolare la risultante degli sforzi di compressione nel calcestruzzo mediante l'integrazione in forma chiusa su ogni triangolo (Fig. 4B). Se al contrario la sezione è parzializzata, ovvero l'asse neutro taglia la sezione, la scomposizione iniziale in triangoli è modificata automaticamente in modo da interessare solo la zona di calcestruzzo compresso (Fig. 4C). In presenza di tensoflessione ed asse neutro esterno alla sezione, la sezione di partenza si riduce invece alle sole barre di acciaio.

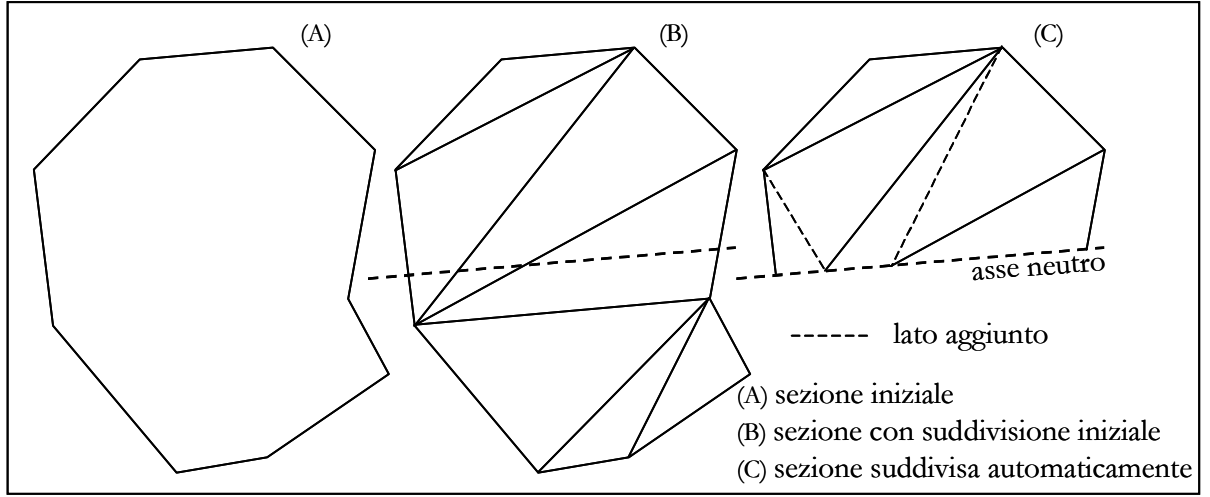


Figura 4 – Discretizzazione della sezione in triangoli.

3.2. Le equazioni di equilibrio

Assegnata una generica sezione in c.a. soggetta a presso- o tensoflessione, la verifica delle tensioni in esercizio consiste nel determinare la distribuzione degli sforzi sulla sezione in equilibrio con un assegnato vettore di sollecitazioni esterne $\{F\} = \{N, M_x, M_y\}^T$, e nel controllare che questi sforzi siano inferiori alle resistenze di progetto dei materiali. Per l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane e la linearità del legame sforzi-deformazioni, la distribuzione della tensione normale nel calcestruzzo assume la seguente forma:

$$\sigma_c(x, y) = a \cdot x + b \cdot y + c. \quad (1)$$

Imponendo l'equilibrio della sezione reagente alla traslazione ed alla rotazione intorno agli assi X e Y, si ottengono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_{A_c} \sigma_c(x, y) \cdot dA_c + \sum_{s=1}^a \sigma_s(x_s, y_s) = aS_{yi} + bS_{xi} + cA_i \\
 M_x &= \int_{A_c} \sigma_c(x, y) \cdot y \cdot dA_c + \sum_{s=1}^a \sigma_s(x_s, y_s) \cdot y_s = aI_{xyi} + bI_{xi} + cS_{xi} \\
 M_y &= - \int_{A_c} \sigma_c(x, y) \cdot x \cdot dA_c - \sum_{s=1}^a \sigma_s(x_s, y_s) \cdot x_s = -aI_{yji} - bI_{xyi} - cS_{yji}
 \end{aligned} \quad (2)$$

dove gli integrali sono estesi all'area di calcestruzzo compresso, mentre le sommatorie sono relative alle barre di acciaio. Le (2) possono essere riscritte in forma compatta utilizzando la notazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} S_{yi} & S_{xi} & A_i \\ I_{yi} & I_{xyi} & S_{yji} \\ -I_{xyi} & -I_{xi} & -S_{xi} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix} \leftrightarrow [M] \cdot \{X\} = \{F\} \quad (3)$$

dove $[M]$ rappresenta la matrice delle proprietà di massa (aree, momenti statici, momenti di inerzia) della sezione reagente.

La $[M]$ è data dalla somma di due contributi:

$$[M] = [M_c] + [M_s] \quad (4)$$

dove $[M_c]$ è la matrice relativa al solo calcestruzzo ed $[M_s]$ quella dell'acciaio. $[M_s]$ si ricava in modo immediato, perché l'acciaio è dato da un insieme di aree puntiformi, mentre per il calcolo di $[M_c]$ si utilizza la scomposizione in triangoli della zona di calcestruzzo compresso.

3.3. Calcolo delle proprietà di massa del calcestruzzo compresso

L'algoritmo per il calcolo delle proprietà di massa del calcestruzzo compresso attraverso la sua scomposizione in triangoli, è stato strutturato secondo uno schema simile a quello del metodo degli elementi finiti, dove la rigidità di ogni elemento è determinata rispetto ad un sistema di coordinate "locale" adattato all'elemento stesso. Per ogni triangolo della scomposizione è stato pertanto definito un sistema di riferimento locale destrorso $(\bar{X}\bar{O}\bar{Y})$, con l'origine in un vertice del triangolo e l'asse $\bar{X}$ coincidente con uno dei lati. Il riferimento $(\bar{X}\bar{O}\bar{Y})$ è scelto in modo tale che l'elemento giaccia tutto nel primo quadrante (Fig. 5).

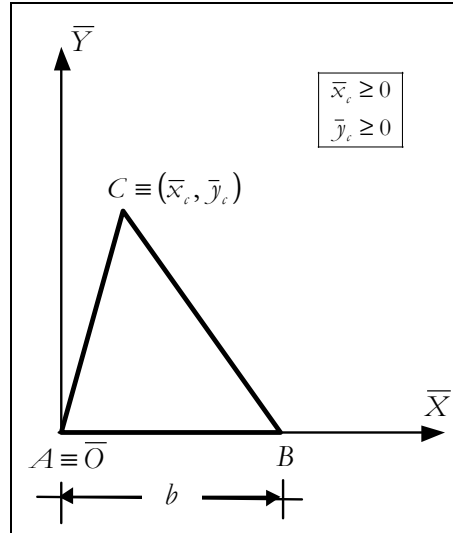


Figura 5 – Generico elemento triangolare della discretizzazione.

Rispetto al sistema di riferimento locale la geometria del triangolo è completamente nota una volta assegnate la distanza b tra i vertici A e B sull'asse $\bar{X}$ e le coordinate $(\bar{x}_c, \bar{y}_c)$ dell'altro vertice C. In questo sistema di riferimento le sei "proprietà di massa" del triangolo (area, momenti statici, momenti di inerzia) si ricavano con semplici integrazioni (Tab. 3).

$A = \frac{1}{2} b \cdot \bar{y}_c$	$\bar{I}_{xy} = \frac{1}{8} \bar{x}_c^2 \cdot \bar{y}_c^2 + \frac{1}{24} \bar{y}_c^2 (b - \bar{x}_c)^2 + \frac{1}{6} \bar{x}_c \cdot \bar{y}_c^2 \cdot (b - \bar{x}_c)$
$\bar{S}_x = \frac{1}{6} b \cdot \bar{y}_c^2$	$S_{\bar{y}} = \frac{1}{3} \bar{y}_c \cdot \bar{x}_c^2 + \frac{1}{2} (b - \bar{x}_c) \cdot \left[\bar{x}_c + \bar{y}_c \cdot \frac{(b - \bar{x}_c)}{3} \right]$
$\bar{I}_x = \frac{1}{12} b \cdot \bar{x}_c^3$	$\bar{I}_y = \frac{1}{12} \bar{y}_c \cdot [\bar{x}_c^3 + (b - \bar{x}_c)^3] + \frac{1}{3} \bar{x}_c \cdot \bar{y}_c \cdot [(b - \bar{x}_c)^2 - \bar{y}_c \cdot \bar{x}_c^2] + \frac{1}{2} b \cdot \bar{y}_c \cdot \bar{x}_c^2$

Tabella 3 – Proprietà di massa (area, momenti statici e di inerzia) del generico triangolo della scomposizione.

Le proprietà di massa del triangolo k-esimo sono raccolte in una matrice $[\bar{M}_c^k]$, che ha la seguente forma:

$$[\overline{M}_c^k] = \begin{bmatrix} \overline{S}_{yc}^k & \overline{S}_{xc}^k & \overline{A}_c^k \\ \overline{I}_{yc}^k & \overline{I}_{xyc}^k & \overline{S}_{yc}^k \\ -\overline{I}_{xyc}^k & -\overline{I}_{xc}^k & -\overline{S}_{xc}^k \end{bmatrix} \quad k = 1 \dots N \quad (5)$$

dove il soprasssegno ricorda che le grandezze sono riferite al sistema locale, il pedice c ricorda che il contributo è relativo al solo calcestruzzo e N è il numero di elementi triangolari in cui è scomposta la zona compressa di calcestruzzo.

Per determinare le proprietà di massa della zona di calcestruzzo compresso occorre determinare quelle di tutti i triangoli rispetto ad un unico sistema di riferimento (XOY), detto “globale”, che è lo stesso sistema rispetto al quale sono definite le coordinate dei vertici della sezione ed il vettore $\{F\}$ delle sollecitazioni esterne. Utilizzando la legge di trasformazione tra due sistemi di riferimento cartesiani ortogonali (Fig. 6), la matrice $[\overline{M}_c^k]$ del k -esimo triangolo è trasformata, attraverso la matrice di rotazione R^k , in una nuova matrice $[M_c^k]$, nella quale le proprietà di massa del triangolo sono espresse nel riferimento globale:

$$[M_c^k] = R^k ([\overline{M}_c^k]) \quad (6)$$

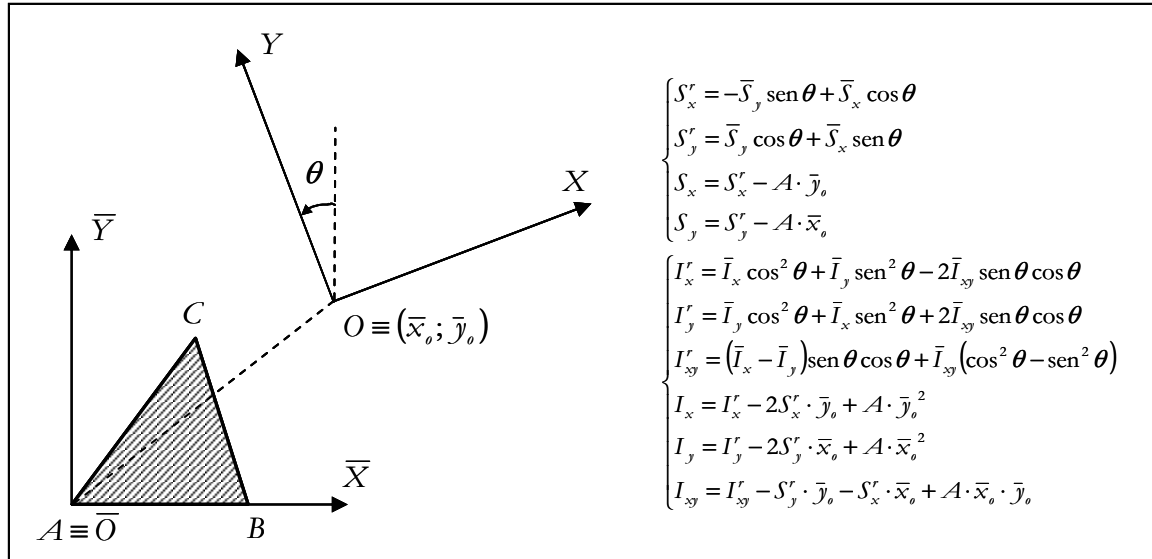


Figura 6 – Trasformazione delle proprietà di massa del generico triangolo dal riferimento locale al riferimento globale.

La R^k è funzione della giacitura del k -esimo sistema di riferimento locale rispetto al riferimento globale, vale a dire dell'angolo θ^k di rotazione (misurato in senso antiorario) e delle coordinate $(\overline{x}_o^k, \overline{y}_o^k)$ del vertice A del triangolo:

$$R^k = R^k(\vartheta^k; \overline{x}_o^k; \overline{y}_o^k) \quad (7)$$

Per ricavare le proprietà di massa della zona di calcestruzzo compresso, è sufficiente infine sommare termine a termine la matrici $[M_c^k]$ di tutti gli elementi triangolari:

$$[M_c] = \sum_{k=1}^N [M_c^k] \quad (8)$$

dove le dimensioni e la struttura della $[M_c]$ sono identiche a quelle delle matrici $[M_c^k]$.

3.4. Soluzione del sistema di equazioni

A questo punto si conoscono sia la matrice $[M]$ sia il vettore delle sollecitazioni $\{F\}$, per cui si può determinare la soluzione del sistema (3) innescando un procedimento iterativo [Toniolo, Malerba, Poluzzi].

Dapprima si suppone che la sezione sia tutta compressa (caso di pressoflessione) o tutta tesa (caso di tensoflessione e sezione reagente limitata al solo acciaio; $[M] \equiv [M_s]$) e si calcolano le sue proprietà di massa; quindi dalla (3) si calcolano i parametri (a_1, b_1, c_1) che individuano il piano delle tensioni di 1° tentativo. Se l'asse neutro non taglia la sezione, i parametri (a_1, b_1, c_1) rappresentano la soluzione, se viceversa l'asse neutro taglia la sezione, l'ipotesi iniziale non è soddisfatta. In quest'ultimo caso si assume come sezione reagente quella individuata dai parametri (a_1, b_1, c_1) determinati al 1° passo, quindi con la (3) si calcolano nuovi valori (a_2, b_2, c_2) dei parametri. Il procedimento iterativo si arresta quando il valore della tensione massima nel calcestruzzo al passo i -esimo, calcolata a partire dai parametri (a_i, b_i, c_i) , è "vicino" a quello della tensione massima al passo precedente (Fig. 7).

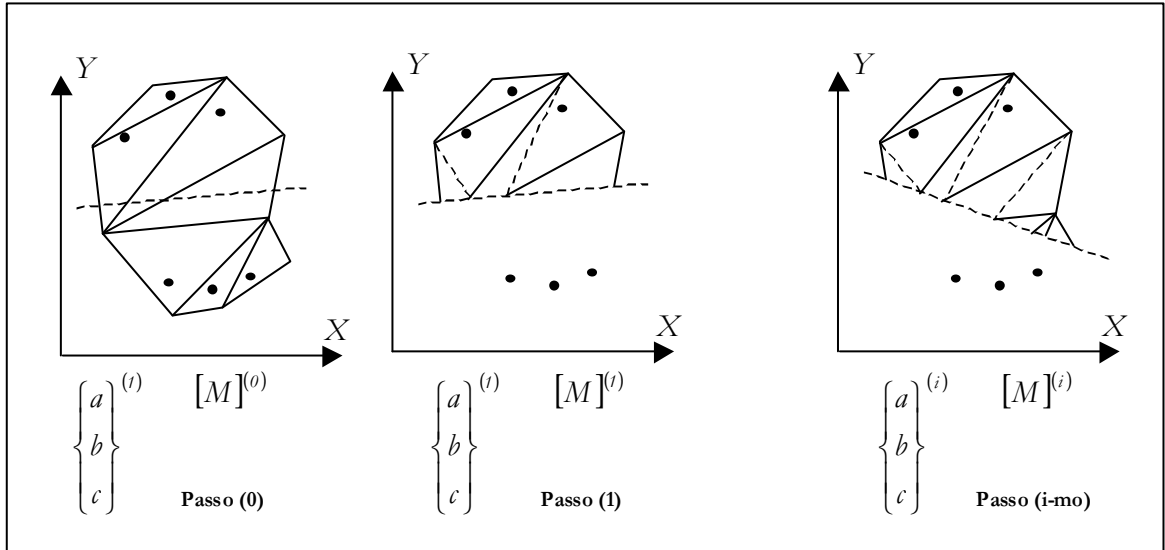


Figura 7 – Schema grafico del procedimento iterativo per la ricerca dell'asse neutro.

3. Struttura dell'algoritmo

In questo paragrafo si descrive la struttura dell'algoritmo così come è stato sviluppato in ambiente MATLAB. Si ripercorre pertanto in modo approfondito quanto già illustrato per linee generali nei paragrafi precedenti.

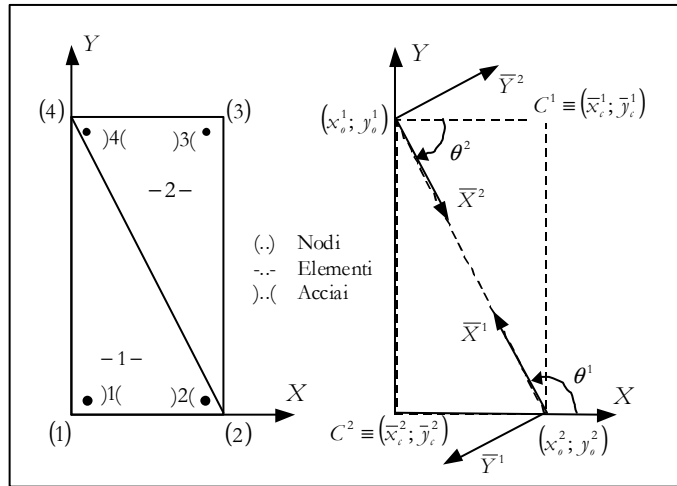


Figura 8 – Applicazione del metodo ad una sezione rettangolare.

Assegnata una sezione in c.a. (Fig. 8), il punto di partenza della procedura consiste nello scomporla in un insieme di triangoli. Quindi si costruiscono la matrice contenente l'identificatore e le coordinate dei nodi $[N]$, quella delle connessioni degli elementi della scomposizione $[E]$, la matrice delle coordinate e dei diametri delle barre di acciaio $[A]$ ed il vettore delle sollecitazioni esterne $\{F\}$. Tramite le matrici $[N]$, $[E]$ ed $[A]$, si determina la matrice delle proprietà di massa $[M]$ con l'algoritmo descritto più avanti.

Si suppone inizialmente che la sezione sia interamente reagente se $N < 0$ (compressione) oppure formata dal solo acciaio se $N > 0$ (trazione). Dalla soluzione del sistema matriciale (3), dove la matrice $[M]$ è quella della sezione interamente reagente per $N < 0$ o quella del solo acciaio per $N > 0$, si determina la giacitura $n^{(1)}$ dell'asse neutro di primo tentativo. Se l'asse neutro non taglia la sezione, l'ipotesi iniziale è soddisfatta ed il risultato trovato coincide con la soluzione del problema. Se viceversa l'asse neutro taglia la sezione, l'ipotesi iniziale non è soddisfatta e occorre innescare un procedimento iterativo. Si discretizza la zona compressa individuata dall'asse neutro $n^{(1)}$ di primo tentativo con nuovi elementi triangolari, modificando i triangoli della scomposizione iniziale, e si determinano nuovamente la matrice dei nodi $[N]^{(i)}$ e la matrice degli elementi $[E]^{(i)}$, dalle quali si ricalcola la matrice $[M]^{(i)}$. Risolvendo ora il sistema (3) con $[M]^{(i)}$, si trova la giacitura dell'asse neutro di secondo tentativo $n^{(2)}$. A questo punto si procede ad una nuova discretizzazione, scomponendo in triangoli la zona compressa individuata da $n^{(2)}$ e ricalcolando le matrici $[N]$, $[E]$ e $[M]$. Il procedimento iterativo si arresta quando la differenza tra le tensioni massime calcolate in due passi consecutivi ($n^{(i)}$ e $n^{(i+1)}$), a partire dai parametri (a, b, c) dell'asse neutro, diventa sufficientemente piccola (Fig. 9).

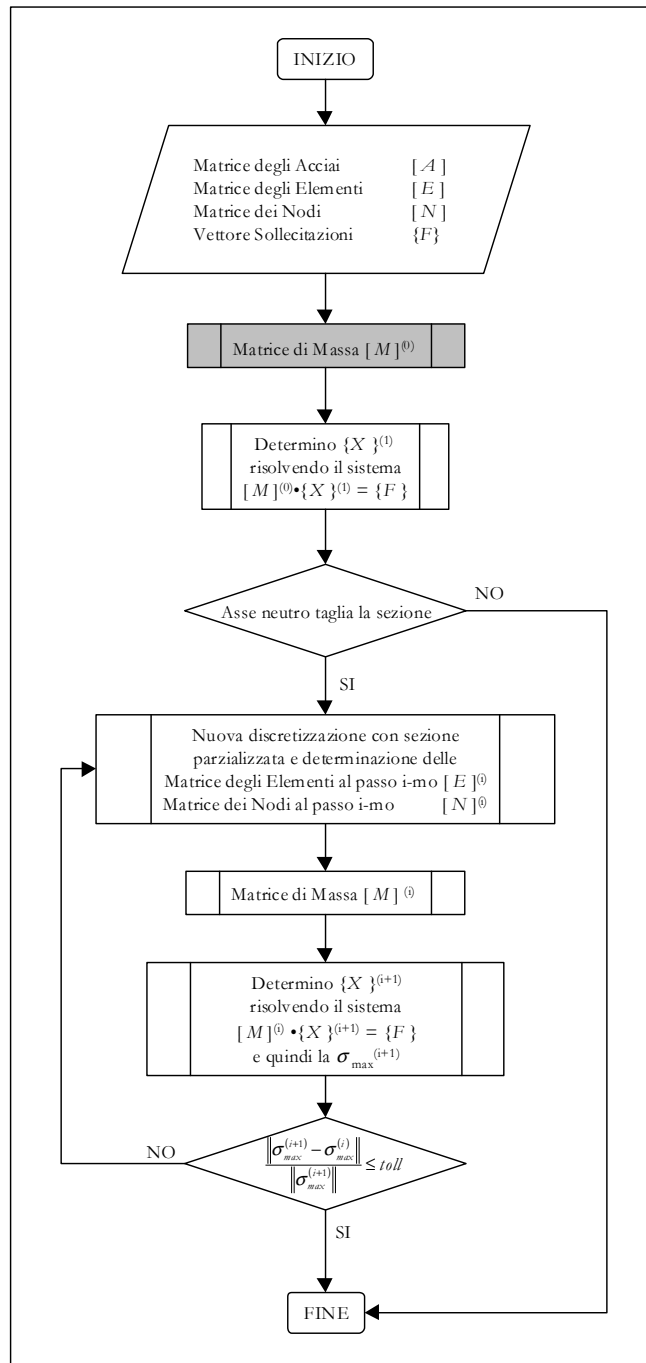


Figura 9 – Diagramma di flusso dell’algoritmo per la verifica delle tensioni in esercizio.

L’algoritmo per la determinazione della matrice $[M]$ è molto semplice e, come anticipato, l’idea ha preso spunto dal calcolo della matrice di rigidezza nel metodo degli elementi finiti. Dapprima si costruiscono separatamente la matrice $[MASSELG]$, che contiene le proprietà di massa degli elementi triangolari di calcestruzzo, e la matrice $[MASSACCG]$, con le proprietà di massa delle barre di acciaio. Entrambe le matrici sono riferite al sistema di riferimento “globale”. Quindi con una semplice somma si ottiene la matrice $[M]$ della sezione reagente (Fig. 10).

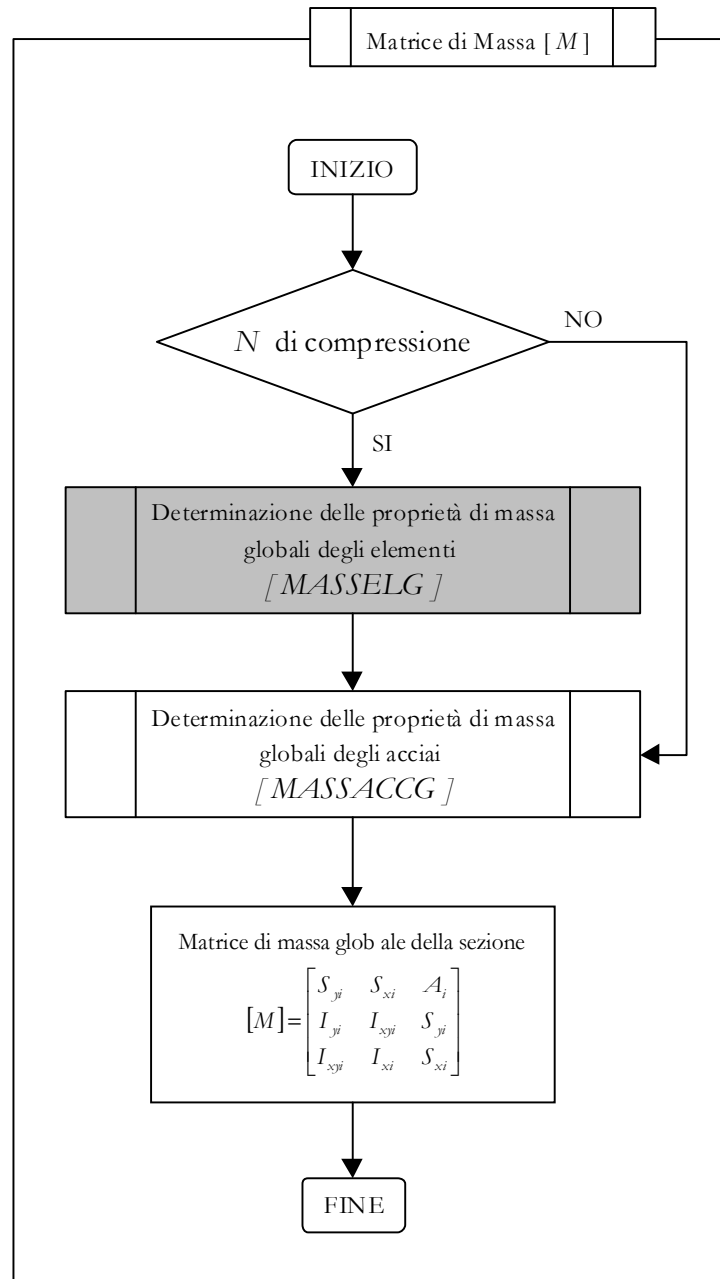


Figura 10 – Algoritmo per il calcolo delle proprietà di massa (area, momenti statici, momenti di inerzia) della sezione reagenti.

La matrice $[MASSELG]$ si costruisce dalle proprietà di massa di un triangolo, con semplici operazioni matriciali ed una trasformazione di coordinate. Per ogni elemento triangolare ABC si definisce un sistema di riferimento locale con l'asse $\bar{x}$ sul lato AB; si determinano poi le coordinate del vertice C rispetto a questo riferimento, la distanza b tra i vertici A e B $(\bar{x}_c, \bar{y}_c, b)$ e la giacitura del riferimento locale (coseni direttori e coordinate (x_0, y_0) dell'origine) rispetto al sistema di riferimento globale. Tutti questi dati sono memorizzati nella matrice "locale dell'elemento" $[EL]$. Si calcolano poi elemento per elemento le proprietà di massa nel riferimento locale ($[MASSEL]$), ed in ultimo, tramite la matrice $[EL]$, si esprimono questi valori nel riferimento globale ($[MASSELG]$). La Fig. 11 illustra la costruzione della matrice $[MASSELG]$ per la sezione rettangolare in Fig. 8.

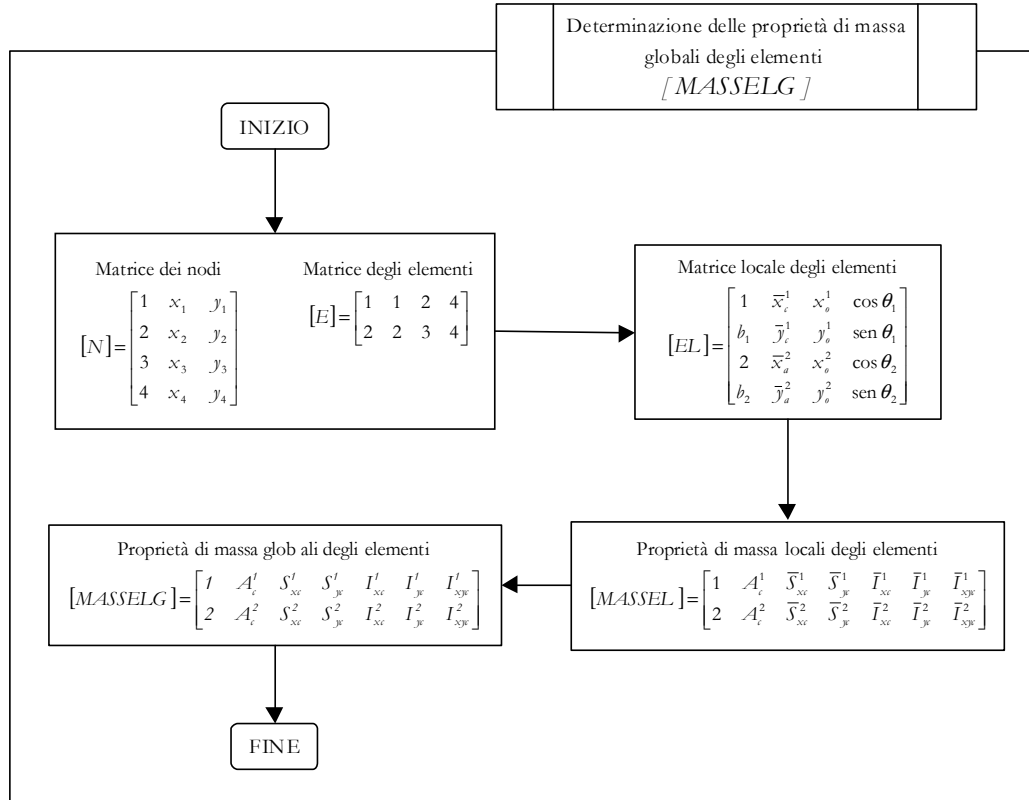


Figura 11 – Costruzione della matrice $[MASSELG]$ per la sezione rettangolare in Fig. 8.

4. Esempi numerici

Per verificare la bontà dell'algoritmo proposto, sono state eseguite una serie di prove numeriche. In particolare sono state verificate la procedura di aggiornamento della discretizzazione della sezione ad ogni passo del processo iterativo, la correttezza della soluzione ottenuta per sezioni di forma ricorrente e varie condizioni di carico, e la proprietà di convergenza della soluzione.

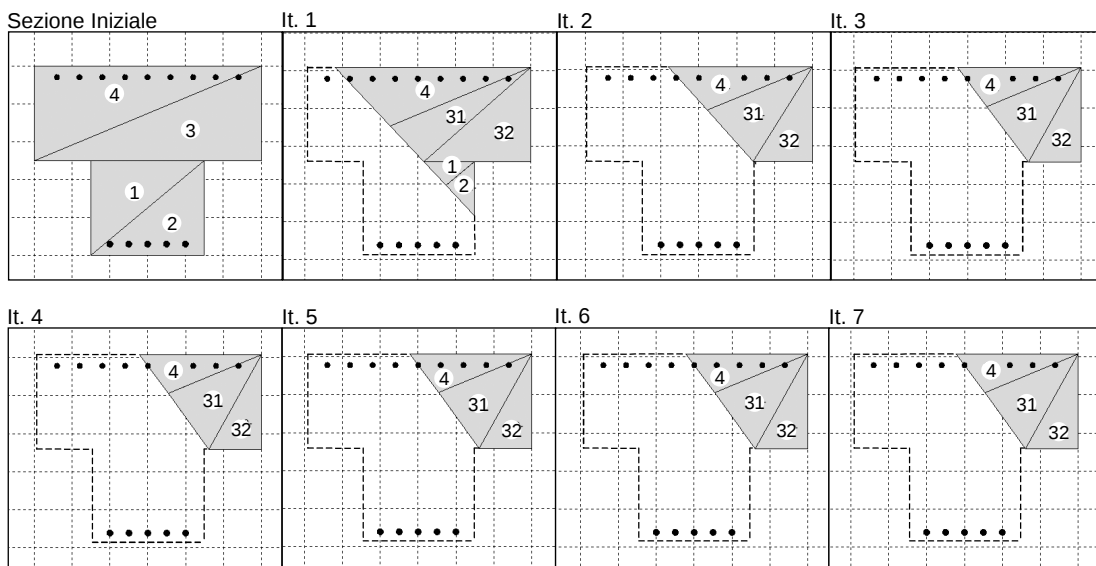


Figura 12 - Applicazione dell'algoritmo ad una sezione a T.

La bontà del processo di aggiornamento automatico della discretizzazione è stata quindi facilmente verificata costruendo l'immagine della sezione reagente ad ogni passo. La Fig. 12 e la Fig. 13 mostrano per due diverse sezioni la variazione della discretizzazione da un passo all'altro, al variare della posizione dell'asse neutro. La Fig. 12 è relativa a una sezione a T, che è molto comune nelle intelaiature in c.a., mentre la Fig. 13 illustra una sezione di forma poligonale, che rappresenta la sezione di uno dei pilastri del Nuovo Palazzo di Giustizia di Firenze.

La procedura di aggiornamento della discretizzazione della sezione reagente avviene secondo il seguente criterio. Quando l'asse neutro taglia un elemento triangolare, si possono presentare due diversi casi: l'elemento ha due nodi nella zona compressa oppure ne ha soltanto uno. Nel primo caso il quadrilatero formato dai due nodi del triangolo e dai punti di intersezione dell'asse neutro con i lati dell'elemento viene suddiviso in altri due elementi triangolari (per es.: l'elemento 3 in Fig. 12 viene suddiviso alla prima iterazione nei due triangoli 31 e 32). Nel secondo caso, quando soltanto un nodo si trova in zona compressa, si ottiene automaticamente un nuovo triangolo formato da questo nodo e dai due nodi di intersezione dell'asse neutro con i lati del triangolo (per es.: elementi 1, 2 e 4 in Fig. 12). Se tutto l'elemento è esterno alla zona compressa, l'elemento viene escluso (per es.: elementi 1 e 2 in Fig. 12 alla seconda iterazione).

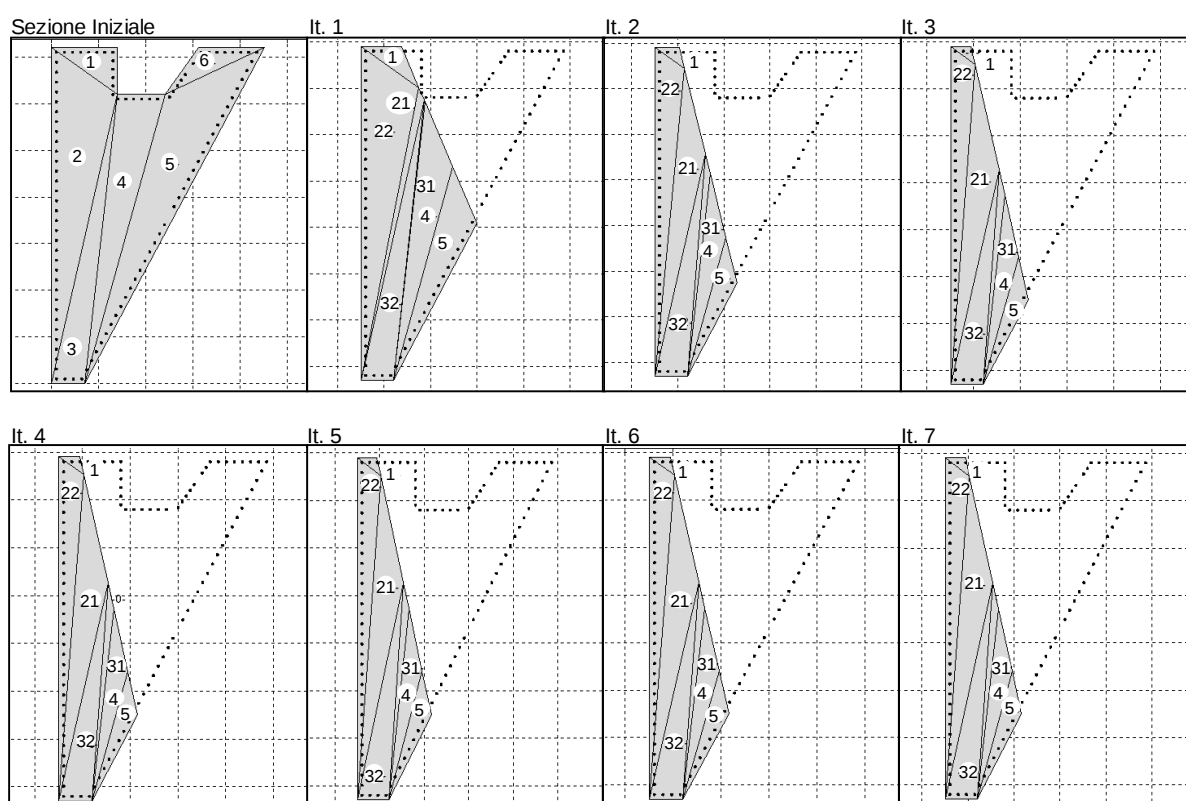


Figura 13 – Applicazione dell'algoritmo alla sezione di uno dei pilastri del Progetto del Nuovo Palazzo di Giustizia di Firenze.

La correttezza della soluzione è stata verificata in termini di valori delle tensioni e posizione dell'asse neutro alcune sezioni di uso corrente (Fig. 14), nei casi di sezione interamente reagente, sezione parzializzata e sezione di solo calcestruzzo.

Infine, in tutte le analisi numeriche eseguite, la convergenza del metodo iterativo alla soluzione è stata molto rapida. Sia la posizione dell'asse neutro che il valore della compressione massima nel calcestruzzo sono state determinate con una precisione molto elevata (errore relativo di circa 10^{-6}) in un numero massimo di dieci iterazioni.

5. Idee fondamentali per l'estensione al caso degli stati limite ultimi

Il punto di forza dell'algoritmo proposto è rappresentato dalla possibilità di integrare in modo esatto gli sforzi di compressione sulla sezione reagente di calcestruzzo di una sezione poligonale in c.a., senza ricorrere ad integrazioni numeriche. Nei paragrafi precedenti l'algoritmo è stato illustrato con riferimento alla verifica delle tensioni in esercizio, per la quale si adotta un diagramma degli sforzi lineare. In realtà, lo stesso algoritmo si può utilizzare per la verifica allo stato limite ultimo (S.L.U.), laddove il diagramma degli sforzi di compressione sul calcestruzzo non è più lineare, ma ha un andamento parabolico per deformazioni comprese tra 0% e 0,2% ed un andamento rettangolare per deformazioni comprese tra 0,2% e 0,35%.

Per dimostrare la possibilità di estendere il metodo alla verifica allo S.L.U., si consideri una sezione in c.a. a contorno poligonale ed una sua generica configurazione di rottura. In corrispondenza di questa configurazione la sezione risulta divisa in tre zone: una prima zona dove il calcestruzzo non reagisce, una seconda dove gli sforzi seguono un andamento parabolico (zona 'P' in Fig. 15) ed una terza zona dove l'andamento degli sforzi è rettangolare (zona 'R' in Fig. 15). A partire dalla discretizzazione iniziale, si può allora suddividere la zona compressa in modo che ogni triangolo sia tutto all'interno della zona 'P' o tutto nella zona 'R'. Quindi si può procedere all'integrazione in forma chiusa delle risultanti degli sforzi su tutti i triangoli delle due zone, per ottenere i valori delle sollecitazioni N , M_x e M_y corrispondenti alla configurazione di rottura scelta.

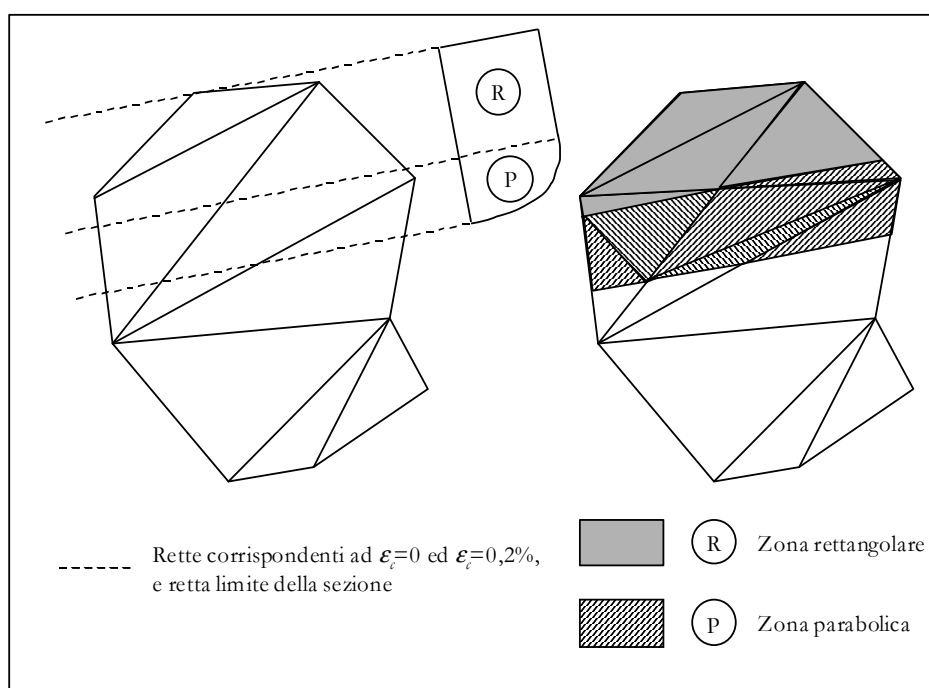


Figura 14 – Estensione della scomposizione in triangoli alla verifica allo stato limite ultimo.

L'algoritmo può quindi essere utilizzato per costruire al variare della giacitura dell'asse neutro la superficie di interazione $N - M_x - M_y$ della sezione allo S.L.U.

6. Considerazioni conclusive

È stato presentato un algoritmo per la verifica allo stato limite di esercizio di sezioni in c.a. a contorno poligonale. L'idea di base dell'algoritmo consiste nella discretizzazione della sezione da verificare in un insieme di triangoli, sui quali gli sforzi di compressione nel calcestruzzo possono essere calcolati in forma chiusa, una volta nota la posizione dell'asse neutro. La discretizzazione iniziale è utilizzata per calcolare la risultante degli sforzi nel caso di sezione interamente reagente, mentre nel caso di sezione parzializzata la discretizzazione viene modificata in modo automatico ed interessa solo la zona di calcestruzzo compresso. Per verificare la validità dell'algoritmo sono

state eseguite una serie di prove numeriche che hanno permesso di verificare la correttezza dei risultati, e hanno inoltre evidenziato la rapida convergenza alla soluzione con una precisione molto elevata. Infine è stata brevemente descritta la possibilità di utilizzare lo stesso approccio per la costruzione delle superfici di interazione allo S.L.U. di sezioni poligonali.

7. Ringraziamenti

Gli autori desiderano ringraziare il Prof. Paolo Spinelli del Dipartimento di Ingegneria Civile dell'Università di Firenze, per il sostegno fornito durante lo svolgimento del presente lavoro.

8. Riferimenti bibliografici

- [1] Toniolo, G., *Cemento Armato. Calcolo agli Stati Limite*, 2^a Ed., Ed. Masson, 1993
- [2] Poluzzi, R., *Sul calcolo delle tensioni nelle pile dei ponti di cemento armato soggette a pressoflessione deviata. Procedimento risolutivo valido per sezioni di forma qualunque*, INARCOS, Bologna, Marzo 1980
- [3] Hsu C. T. T., 1985. *Biaxially loaded L-shaped reinforced concrete columns*, Journal of Structural Engineering, ASCE 111, 2576-2598.
- [4] Malerba, P., *Aspetti numerici dell'analisi di sezioni in c.a. soggette a sforzo normale*, Collegio dei Tecnici della Industrializzazione Edilizia, Atti del 5° Congresso CTE, Pisa 9-10-11 Novembre 1984
- [5] Nielsen, T. B., 1986. *Serviceability Limit State Analysis of Cracked Polygonal Concrete Sections under Biaxial or Symmetric Bending*, ACI Journal, March-April, No. 2 Proceedings V. 83, 209-218
- [6] *MATLAB Function Reference*, MathWorks, Inc., 1999
- [7] Paone, L., "S.L.E. & S.L.U. Un programma automatico per la verifica allo S.L.E. e allo S.L.U. di sezioni in c.a. di forma generica", Esercitazione del Corso di Progetto di Strutture A.A. 1999-2000, Facoltà di Ingegneria, Università di Firenze
- [8] Nielsen, T. B., 1987. *Ultimate flexural capacity of cracked polygonal concrete sections with circular holes under biaxial bending*, ACI Structural Journal, May-April, V. 84, 212-215
- [9] D.M. Min. LL. PP. 09.01.1996 – *Norme Tecniche per il calcolo, l'esecuzione ed il collaudo delle strutture in cemento armato, normale e precompresso e per le strutture metalliche*